

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ РИСКОВОГО ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

Стаття присвячена вибору оптимального розподілу часток активів в портфелі цінних паперів. Проаналізовано моделі оптимізації фондового портфелю Марковіца та Шарпа. Наведено приклад формування оптимальної структури портфеля цінних паперів підприємств України.

Введение. На Украине рынок ценных бумаг начал активно развиваться только с началом приватизации. Современный фондовый рынок Украины можно считать достаточно сформированным, что позволяет рассматривать практическое вложение средств в ценные бумаги. В таких условиях становится актуальным рассмотрение инвестиционного процесса в условиях украинского рынка. Важнейшую роль в управлении инвестициями играет теория оптимального портфеля, предназначенная для формирования диверсифицированного портфеля ценных бумаг, соответствующего требованиям инвестора к прибыли и риску [1]. В данной статье приводится анализ моделей портфеля и на примере украинских эмитентов проводится численная оптимизация портфеля из пяти видов ценных бумаг.

Анализ основной методики. Пусть доходность портфеля из N ценных бумаг R_p и его риск σ_p определяются функциями:

$$R_p = R_p(W, \sigma, r), \quad \sigma_p = \sigma_p(W, \sigma, r), \quad (1)$$

где $W = (W_1, \dots, W_N)$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ и $r = (r_1, \dots, r_N)$ - векторы долей ценных бумаг, их рисков и доходностей соответственно. Векторы σ и r для данного портфеля заданы, а вектор W требуется найти при ограничениях: сумма долей всех акций постоянна:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_N = 1, \quad (2)$$

доля акции не может быть отрицательной:

$$W_i \geq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Решением задачи является определенная целевая структура портфеля, представленная набором значений (W_1, W_2, \dots, W_N) . Идеальная постановка задачи оптимизации портфеля – получить максимальную доходность при минимальном риске – некорректна [2]. Существует два варианта корректной постановки задачи оптимизации портфеля.

1. Зададим максимально допустимую величину риска σ_{req} . Прямая задача оптимизации сводится к выбору структуры портфеля, при которой его риск не превышает заданного значения, а доходность максимальна:

$$R_p \rightarrow \max; \sigma_p \leq \sigma_{req}; W_i \geq 0; \sum W_i = 1. \quad (4)$$

2. Зададим минимально допустимую величину доходности R_{reg} . Обратная задача оптимизации сводится к выбору структуры портфеля, при которой его доход не ниже заданного значения, а риск минимален:

$$R_p \geq R_{reg}; \sigma_p^2 \rightarrow \min; W_i \geq 0; \sum W_i = 1. \quad (5)$$

На практике используют множество моделей портфеля ценных бумаг, из которых чаще других применяются модели Марковица и Шарпа.

Основная идея модели Марковица заключается в статическом рассмотрении будущего дохода как случайной переменной, т.е. доходы по отдельным ценным бумагам случайно изменяются в некоторых пределах [3].

Модель Марковица включает следующие основные допущения:

- за доходность ценных бумаг принимается математическое ожидание доходностей ценных бумаг портфеля (1);
- за риск ценных бумаг принимается СКО доходности (1);
- степень взаимосвязи между ценными бумагами выражается коэффициентом линейной корреляции.

Ожидаемая доходность портфеля определяется по формуле:

$$R_p = \sum_{i=1}^N W_i \cdot r_i \quad (6)$$

Риск портфеля ценных бумаг определяется функцией:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (W_i \cdot W_j \cdot \sigma_{ij})} \quad (7)$$

где W_i, W_j - доли вложений в i -ю и j -ю ценные бумаги;

σ_{ij} - ковариация между доходностями i -й и j -й ценных бумаг:

$$\sigma_{ij} = \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij}, \quad (8)$$

где σ_i, σ_j — риски ценных бумаг (среднеквадратичные отклонения),

ρ_{ij} — коэффициент линейной корреляции доходностей бумаг i и j .

Индексная модель Шарпа основывается на многолетних наблюдениях и выявлении того факта, что нормы прибылей большинства акций зависят

преимущественно от одного фактора (фактора рынка). Рост рыночных индексов влечет за собой рост стоимости большинства акций и наоборот [4]. Модель Шарпа в отличие от модели Марковица не учитывает корреляцию бумаг в портфеле, дает некорректные результаты в случае значительных колебаний доходностей активов, не связанных с рыночными изменениями, использует более широкую базу статистических наблюдений.

Постановка задачи. С учетом указанных допущений применим классическую модель Марковица (6)-(8) для формирования оптимального портфеля ценных бумаг эмитентов Украины.

Для рассмотрения выбраны акции пяти компаний, три из которых включены в корзину ПФТС (Днепроэнерго, Западэнерго, Укрнефть), остальные (Мотор-Сич, Турбоатом) были выделены как имеющие высокие показатели нормы прибыли среди представленных на торгах ПФТС акций [5]. За исходные данные взяты котировки акций указанных за период с 1.09.2005 по 28.02.2006 [6,7].

Доходность ценной бумаги предприятия определяется как относительная доходность за 1 день:

$$r_i = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=2}^T \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot 100\%, \quad i = \overline{1, N}, \quad (9)$$

где P_t, P_{t-1} - стоимость продажи и покупки акции i -го вида в последовательных периодах, T - количество периодов, N - количество видов активов[8]. Коэффициенты модели Марковица представлены в табл. 1.

Таблица 1

| Эмитент | Доходность актива (r_i), % | СКО (σ_i), % | Коэффициент корреляции (ρ) | |
|-----------------|-----------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|--------------------|
| Днепроэнерго | 20,29 | 6,62 | $\rho_{DZ} = 0,64$ | $\rho_{ZM} = 0,39$ |
| Западэнерго (Z) | 10,48 | 4,07 | $\rho_{DU} = -0,08$ | $\rho_{ZT} = 0,46$ |
| Укрнефть (U) | 6,50 | 3,78 | $\rho_{DM} = 0,53$ | $\rho_{UM} = 0,01$ |
| Мотор-Сич (M) | 13,54 | 7,02 | $\rho_{DT} = 0,06$ | $\rho_{UT} = 0,04$ |
| Турбоатом (T) | 36,74 | 16,91 | $\rho_{ZU} = -0,25$ | $\rho_{MT} = 0,09$ |

Для всех рассматриваемых активов, кроме акций Днепроэнерго, выполняется закономерность: чем выше доходность, тем выше риск. Активы Днепроэнерго, в свою очередь, высокодоходны и имеют низкий риск. Анализ коэффициентов корреляции позволяет сделать вывод о наличии достаточно сильной прямой линейной связи между изменением доходности активов Днепроэнерго, Западэнерго и Мотор-Сич, а также активов Западэнерго, Турбоатом и Мотор-Сич. Другие корреляционные связи между представленными активами слабо выражены.

Для решения оптимизационной задачи в постановке (4) и (5) была сформирована целевая вектор-функция, состоящая из трех компонент:

1) внешней штрафной функции нарушения условия в виде неравенства принадлежности варьируемых параметров (долей акций в портфеле) единичной области и условия в виде равенства (2);

2) внешней штрафной функции нарушения ограничения в виде неравенства $\sigma_p^2 \leq \sigma_{req}$ (для прямой задачи) или $R_p \geq R_{req}$ (для обратной задачи);

3) функции риска (7) для прямой задачи или отрицательной функции дохода (6) для обратной задачи.

Моделирование портфеля и нахождение численного решения поставленной задачи условной оптимизации производились с помощью программного комплекса, разработанного в среде системы MATLAB.

Основные результаты. В результате минимизации целевой функции векторным методом Нелдера-Мида деформируемого многогранника со скользящим допуском [9] из начала координат были получены распределения долей акций в оптимальном портфеле из пяти видов ценных бумаг для заданных значений доходности и риска (табл. 3).

В табл. 2 и на рис. 1,2 приведены результаты решения задачи оптимизации (4), (5) для портфеля из двух видов ценных бумаг. В структуру портфеля включены акции Днепроэнерго и Укрнефть. Данный пример позволяет проиллюстрировать поиск оптимального решения в двумерном пространстве параметров и отображающем его пространстве критериев.

Таблица 2

| | Прямая задача | | | Обратная задача | | |
|-------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------|--------------|--------------|
| Акции | $\sigma_{req}=12$ | $\sigma_{req}=19$ | $\sigma_{req}=31$ | $R_{req}=12$ | $R_{req}=15$ | $R_{req}=18$ |
| Днепроэнерго | 0,386 | 0,623 | 0,837 | 0,399 | 0,617 | 0,834 |
| Укрнефть | 0,614 | 0,377 | 0,163 | 0,601 | 0,383 | 0,166 |
| Характеристики портфеля | | | | | | |
| Доходность, % | 11,816 | 15,094 | 18,033 | 12,000 | 15,000 | 18,000 |
| Риск, % | 11,865 | 19,000 | 31,000 | 12,091 | 18,704 | 30,836 |

На рис.1 отражен процесс поиска оптимальной структуры двухвидового портфеля в допустимой области, обеспечивающей выполнение условия (3) и ограниченной единичным квадратом. Сплошной и пунктирной линиями показаны траектории всех и лучших точек поиска соответственно. Точка минимума векторной целевой функции лежит внутри квадрата на линии ограничения в виде равенства (2).

На рис.2 отражен поиск оптимального портфеля в пространстве критериев. Точка минимума целевой функции принадлежит левой нижней границе достижимой области, соответствующей паретооптимальной области.

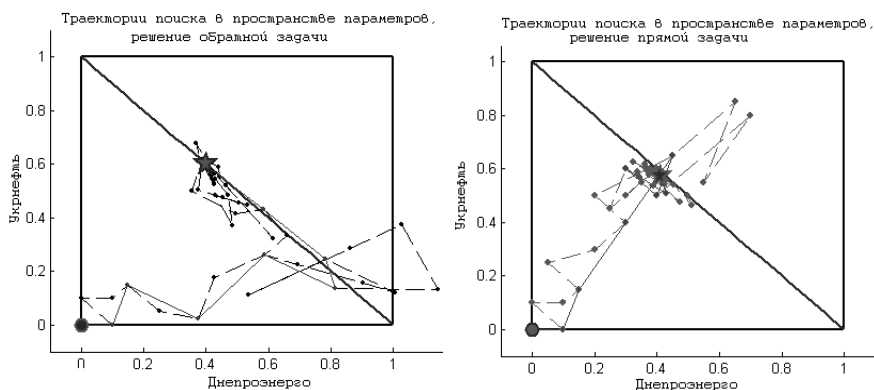


Рис. 1 Решение задачи оптимизации в допустимой области

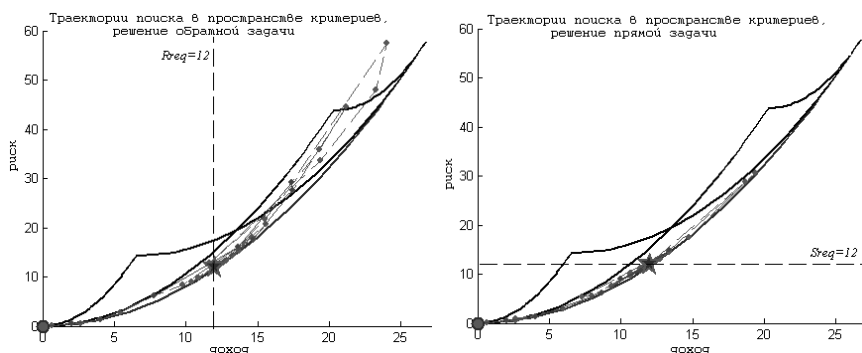


Рис. 2 Решение задачи оптимизации в достижимой области

Анализ табл.3 показывает, что с увеличением ожидаемой доходности портфеля части менее доходных активов Укрнефть и Западэнерго в результирующем распределении снижаются, при этом доля акций Укрнефть, имеющих минимальную доходность из всех рассматриваемых, уменьшается быстрее. Вклад наиболее рискованных акций Турбоатома в структуру оптимального портфеля растет с ростом риска и доходности портфеля.

В структуре решений прямой и обратной задачи для значений параметров «доходность-риск», отличающихся незначительно, заметны колебания долей акций Днепроэнерго и Мотор-Сич, характеризующихся наличием тесной корреляционной связи. Указанные расхождения можно объяснить замещением менее доходных и более рискованных активов Мотор-Сич акциями

Днепроэнерго. В то же время положительная корреляция изменений доходностей акций Днепроэнерго и Западэнерго не вызывает замещения одного вида другим, т.к. ни один из них не имеет однозначного превосходства: активы Днепроэнерго характеризуются большей доходностью, Западэнерго – меньшим риском.

Таблица 3

| | Прямая задача | | | | Обратная задача | | | |
|-------------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|-----------------|--------------|--------------|--------------|
| Акции | $\sigma_{req}=6$ | $\sigma_{req}=9$ | $\sigma_{req}=15$ | $\sigma_{req}=30$ | $R_{re}=12$ | $R_{req}=15$ | $R_{req}=18$ | $R_{req}=21$ |
| D | 0,151 | 0,171 | 0,165 | 0,197 | 0,155 | 0,332 | 0,399 | 0,285 |
| Z | 0,396 | 0,382 | 0,290 | 0,243 | 0,342 | 0,326 | 0,255 | 0,234 |
| U | 0,314 | 0,119 | 0,114 | 0,062 | 0,303 | 0,147 | 0,111 | 0,058 |
| M | 0,111 | 0,289 | 0,255 | 0,202 | 0,171 | 0,141 | 0,092 | 0,136 |
| T | 0,028 | 0,039 | 0,176 | 0,296 | 0,029 | 0,054 | 0,143 | 0,287 |
| Характеристики портфеля | | | | | | | | |
| Доходность, % | 11,800 | 13,580 | 17,031 | 20,553 | 12,078 | 15,005 | 18,002 | 21,007 |
| Риск, % | 5,900 | 8,665 | 15,000 | 30,000 | 5,900 | 8,800 | 14,680 | 29,150 |

Выводы. Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы. 1. Учет статистических характеристик и взаимных корреляционных связей ценных бумаг способствует диверсификации портфеля, существенно снижающей его риск по сравнению с риском включенных в него активов. 2. Модель Марковица является основой возникновения модели Шарпа и других существующих на сегодняшний день моделей. 3. Методом Нелдера-Мида эффективно решены задачи оптимизации портфеля.

Список литературы: 1. Савчук В.П., Дудка В. Оптимізація фондового портфелю www.management.com.ua/finance/index.php. 2. Вітлінський В.В., Верченко П.І. Аналіз управління економічним ризиком.- К., 2000. 450 с. 3. Markowitz H. Portfolio Selection // Journal of Finance, vol.VII, №1, March 1952. p. 77-91. 4. Шарп У., Александер Г, Бейли Дж. Инвестиции. - М.: Инфра-М, 1997, 1200 с. 5. www.pfts.com.ua. 6. Котировки акций <http://www.kommersant.ua/archive/archive.html>. 7. Котировки акций www.fin.org.ua/pfts.php. 8. Ценные бумаги: учебник /Под ред. В.И. Колесникова. – М.: Финансы и статистика, 2000. 9. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. 534с.

Поступила в редколлегию 27.04.06